数理解析研究所講究録
763巻 1991年 124-130

Radon 変換と擬微分作用素

新潟大学教養部　田島慎一
(Shinichi TAJIMA)

X を m 次元複素多様体，Y を X の部分複素多様体とする。Y に対する R-holomorphic microfunction 全体のなす層を $C^{R}_{Y|X}$ と置く (SKK, Chap.II, Def. 1.1.4)。今 holomorphic な偏微分作用素 P に対する偏微分方程式 $Pu=f$ が与えられたとする。ここに u,f は R-holomorphic microfunctions とする。

Y が超曲面の場合には層 $C^{R}_{Y|X}$ は直感的にも分かり易いのに対し，Y の余次元が高い場合はこの層自体分かり易いとは言えない。

そこでここでは，複素領域での Radon型積分変換を利用することに依り与えられた偏微分方程式の問題を余次元１の場合に帰着できることを示す。

１．偏微分作用素の Radon変換

次のように記号を定める。

$X = \mathbf{C}^m$,　$Y = \{(z_1,\dots,z_m)\in X \mid z_1=z_2=\cdots=z_d=0\}$,

$z=(z_1,\dots,z_m)$, $z'=(z_1,\dots,z_d)$, $z''=(z_{d+1},\dots,z_m)$,

$\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_d)$, $\langle z',\xi'\rangle=z_1\xi_1+z_2\xi_2+\cdots+z_d\xi_d$.

$W = \mathbf{C}^{m+1} = \{(z'',\xi',p) \mid z''\in\mathbf{C}^{m-d},\ \xi'\in\mathbf{C}^d,\ p\in\mathbf{C}\}$,

$Z = \{(z'',\xi',p)\in W \mid p=0\}$.

今 "関数 $u(z)$" に対する Radon変換 Ru を次のように形式的に定める。

$$(Ru)(z'', \xi', p) = \int \delta(p - \langle z', \xi' \rangle) u(z) dz'$$

ここでは上記の積分変換に表れる δ-関数の意味付けや積分路の取りかた等については立ち入らないことにする。

さて，この Radon変換 R と偏微分作用素の間に成り立つべき関係を調べよう。

$1 \leqq j \leqq d$ に対しては

$$\begin{aligned}(R(\frac{\partial u}{\partial z_j}))(z'', \xi', p) &= \int \delta(p - \langle z', \xi' \rangle) \frac{\partial u}{\partial z_j} dz' \\ &= \int -\frac{\partial}{\partial z_j} (\delta(p - \langle z', \xi' \rangle)) u dz' \\ &= \int \xi_j \delta'(p - \langle z', \xi' \rangle) u dz' \\ &= \int \xi_j \frac{\partial}{\partial p} \ \delta(p - \langle z', \xi' \rangle u dz' \\ &= (\xi_j \frac{\partial}{\partial p} (Ru))(z'', \xi', p),\end{aligned}$$

$$(R(z_j u))(z'', \xi', p) = \int \delta(p - \langle z', \xi' \rangle)(z_j u) dz'$$

$$= \int ((\frac{\partial}{\partial p})^{-1} (z_j \delta'(p - \langle z', \xi' \rangle)) u dz'$$

$$= \int ((\frac{\partial}{\partial p})^{-1} (-\frac{\partial}{\partial \xi_j}) \delta(p - \langle z', \xi' \rangle)) u dz'$$

$$= -((\frac{\partial}{\partial p})^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (Ru))(z'', \xi, p)$$

他方 $d+1 \leqq k \leqq m$ に対しては

$$(R(\frac{\partial u}{\partial z_k}))(z'', \xi', p) = (\frac{\partial}{\partial z_k} (Ru))(z'', \xi', p),$$

$$(R(z_k u)(z'', \xi', p) = (z_k (Ru))(z'', \xi', p)$$

が成り立つと考えられる。従ってこれらの作用素に対する Radon変換を次の様に定めることにする。

$1 \leqq j \leqq d$ のとき $\quad R(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \xi_j \frac{\partial}{\partial p}$, $\quad R(z_j) = -(\frac{\partial}{\partial p})^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

$d+1 \leqq k \leqq m$ のとき $\quad R(\frac{\partial}{\partial z_k}) = \frac{\partial}{\partial z_k}$, $\quad R(z_k) = z_k$.

このように零階の作用素 z_j の Radon変換は零階の擬微分作用素になること に注意しよう。

次に交換関係を調べる。[A, B]＝AB－BA なる記号を使うと

$$\left[R\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right),\ R(z_j)\right]$$

$$=\left(\xi_j\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(-\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)-\left(-\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\left(\xi_j\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

$$=-\ \xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}+\frac{\partial}{\partial \xi_j}\xi_j\ =\left[\frac{\partial}{\partial z_j},\ z_j\right]$$

等が成り立つことが確かめられる。すなわち Radon変換は正準交換関係を 保つ変換である。従って一般の高階の偏微分作用素 P に対して Radon変換を 導入できる。それを R(P) で表す。以上のことをまとめて次をえる。

定理　偏微分作用素 P の Radon変換 R(P) は擬微分作用素である。

Radon 変換 R(P) の特性多様体は，偏微分作用素 P の特性多様体から 簡単に求める事ができる。

2.　簡単な例

いま

$$X\ =\ \mathbf{C}^3\ =\ \{(z_1,z_2,z_3)\mid z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}\},$$

$$Y\ =\ \{(0,z_2,0)\in X\ \mid z_2\in\mathbf{C}\},$$

とし，次の偏微分方程式

$$P = \frac{\partial}{\partial z_1} : C^{R}_{Y|X} \longrightarrow C^{R}_{Y|X}$$

の解及び可解性について考えてみる。

$$T^*_Y X = \{(0, z_2, 0;\ \xi_1, 0, \xi_3) \mid z_2 \in \mathbf{C},\ \xi_1, \xi_3 \in \mathbf{C}\}$$

であるから

$$T^*_Y X \cap \mathrm{Ch}(P) = \{(0, z_2, 0;\ 0, 0, \xi_3) \mid z_2, \xi_3 \in \mathbf{C}\}$$

であり $T^*_Y X \not\subset \mathrm{Ch}(P)$ となっている。

さて

$$W = \mathbf{C}^4 = \{(z_2, \xi_1, \xi_3, p) \mid z_2, \xi_1, \xi_3 \in \mathbf{C},\ p \in \mathbf{C}\}$$

$$Z = \{(z_2, \xi_1, \xi_3, p) \in W \mid p = 0\}$$

と置き，$u \in C^{R}_{Y|X}$ に対しその Radon変換 $Ru \in C^{R}_{Z|W}$ を

$$Ru = \int \delta(p - z_1\xi_1 - z_3\xi_3) u(z) dz_1 dz_3$$

で定義する(SKK, Chap. II, p. 339)。このとき

$$R(P(u)) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial p}(Ru)$$

が成り立つ。

次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} C^{R}_{Y|X} & \xrightarrow{P} & C^{R}_{Y|X} \\ R\downarrow & & \downarrow R \\ C^{R}_{Z|W} & \xrightarrow[R(P)]{} & C^{R}_{Z|W} \end{array}.$$

W の超曲面 Z は偏微分作用素 $\xi_1\dfrac{\partial}{\partial p}$ に関し $\xi_1 \neq 0$ において非特性的であることに注意しよう。

さて $u \in C^{R}_{Y|X}$ が偏微分方程式 $Pu = 0$ を満たすとする。層 $C^{R}_{Z|W}$ において $\mathrm{Ker}(\xi_1\dfrac{\partial}{\partial p})=0$ が示せる。

$$R(P(u)) = \xi_1\frac{\partial}{\partial p}(R(u))=0$$

より $Ru=0$ を得るが，層に対する Radon変換 R が injective であることから $u=0$ が導ける。すなわち $\mathrm{Ker}(P)=0$ が成り立つ。同様にして $T^*_Y X \cap \mathrm{Ch}(P)$ において $\mathrm{Coker}(P) \neq 0$ が示せる。

より一般の方程式系に対する R-holomorphic microfunction解の構造がわかると面白いかもしれない。

文献

T. Aoki and S. Tajima: theorem of Cauchy-Kowalewsky and micro-differential operators, 数理解析研究所講究録638, (1988), 101-114.

S.R. Deans: The Radon transform and some of its applications, Wiley-Interscience (1983).

A. Martineau: Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes, Math. Annalen 163 (1966), 62-88.

M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara (SKK): Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. 287 (1973), 265-529.